

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

1.

a) Să se demonstreze că $n+1 \leq \sqrt{n(n+3)} < n+2, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

b) Să se calculeze suma

$S = [\sqrt{2 \cdot 5}] + [\sqrt{3 \cdot 6}] + \dots + [\sqrt{2010 \cdot 2013}]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

Soluție:

a) $n+1 \leq \sqrt{n(n+3)} < n+2 \Rightarrow n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 3n \leq n^2 + 4n + 4$ 4p

b) $[\sqrt{n(n+3)}] = n+1$ 2p

$S = 3 + 4 + 5 + \dots + 2011 = \frac{(3+2011) \cdot 2009}{2} = 1007 \cdot 2009$ 1p

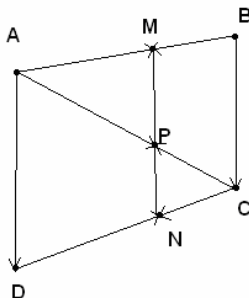
2. Considerăm patrulaterul convex ABCD și punctele $M \in (AB), N \in (CD)$ respectiv $P \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \vec{0}, \overrightarrow{DN} + 3\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Demonstrați că dacă $(BC) \parallel (AD)$, atunci

a) $(MP) \parallel (BC)$;

b) Punctele M, N, P sunt coliniare;

c) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BC})$



a) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PC} \Rightarrow (MP) \parallel (BC)$ 2p

b) $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{DN} = 3\overrightarrow{NC} \Rightarrow (PN) \parallel (AD)$ 1p

$(BC) \parallel (AD)$, deci M,N,P sunt coliniare 2p

c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{BC})$ 2p

3. Lui Doru i-au venit în vizită colegii de clasă. Mama lui l-a întrebat câți oaspeți au venit. Doru a răspuns: "Mai mulți decât șase", dar sora sa de alături a spus: "Mai mulți decât cinci".

Câți colegi i-au venit în vizită lui Doru, dacă se știe că un răspuns este corect și altul nu ?

Soluție:

Fie n numărul colegilor aflați în vizită la Doru.

Dacă presupunem că Doru spune adevărul, atunci sora sa minte, deci sunt mai mulți invitați decât șase și mai puțini decât cinci. CONTRADICȚIE 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

Prin urmare Doru minte, deci sora sa spune adevărul 2p

Așadar sunt cel mult șase colegi și mai mulți decât cinci 2p

$\begin{cases} n \leq 6 \\ n > 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 6$ 1p

4. Să se împrejmuiește un loc în formă de dreptunghi cu un gard lung de 120m. Cât trebuie să fie laturile acestui dreptunghi astfel încât aria locului să fie maximă ?

Soluție:

Realizează un desen corespunzător 1p

Din $2L + 2l = 120 \Rightarrow L + l = 60 \Rightarrow L = 60 - l$ 1p

$A = L \cdot l = (60 - l) \cdot l = 60l - l^2$ 2p

Maximul este atins în vârf deci $A_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{3600}{4} = 900m^2$ 1p

Dreptunghiul căutat este pătratul de latură $l = 30m$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

1. Se dă suma $S_n = 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + n! \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $n! \cdot n = (n+1)! - n!, \forall n \in \mathbb{N}^*,$ unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

b) Calculați S_n .

Soluție

a) Demonstrație 3p

b) $S_n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \dots + [(n+1)! - n!]$ 2p

$S_n = (n+1)! - 1$ 2p

2. Un elev a început să citească o carte pe 1 mai. În fiecare zi el a citit același număr de pagini și a terminat de citit cartea pe 31 mai. Dacă în prima zi el ar fi citit de patru ori mai puține pagini și apoi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, elevul ar fi terminat de citit cartea tot la data de 31 mai. Câte pagini are cartea?

Soluție

Fie n – numărul de pagini citite în fiecare zi 2p

$31 \cdot n = \frac{n}{4} + \left(\frac{n}{4} + 1\right) + \left(\frac{n}{4} + 2\right) + \dots + \left(\frac{n}{4} + 30\right)$ 3p

$n = 20$ 1p

Cartea are $31 \cdot 20 = 620$ pagini 1p

3. Se dau mulțimile:

$$A = \{(a, a, a) / a \in \mathbb{Z}\};$$

$$B = \{(a, b, c) / a + 2b - 3c = 0, a, b, c \in \mathbb{Z}\};$$

$$C = \{(a, b, c) / a + 3b - 4c = 0, a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstrați că $A = B \cap C$.

Obs. Două mulțimi X și Y sunt egale dacă și numai dacă $X \subseteq Y$ și $Y \subseteq X$.

Soluție

1°) $A \subseteq B \cap C$

$\forall (a, a, a) \in A \Rightarrow (a, a, a) \in B$ și $(a, a, a) \in C$, adică $A \subseteq B$ și $A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$ 3p

2°) $B \cap C \subseteq A$

$$\text{Fie } (a, b, c) \in B \cap C \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ a + 3b - 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow b = c \Rightarrow a = b \Rightarrow (a, b, c) = (a, a, a) \in A \Rightarrow$$

$\Rightarrow B \cap C \subseteq A$ 3p

Din 1°) și 2°) $\Rightarrow A = B \cap C$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

4. Demonstrați că expresia dată mai jos nu depinde de x :

$$E = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} - \frac{n-1}{n} \cdot \log_2^2 x, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, x > 0, x \neq 1.$$

Soluție

Notăm $\log_x 2 = t$ 1p

$$E = \frac{1}{t^2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{t^2 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{t^2 \cdot (n-1) \cdot n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{t^2} \dots 2p$$

$$E = \frac{1}{t^2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) - \frac{n-1}{nt^2} \dots 2p$$

$$E = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{nt^2} \dots 1p$$

$$E = 0 \dots 1p$$

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI-A

1. Prețul unui obiect s-a ieftinit cu 75% și apoi noul preț s-a scumpit de două ori consecutiv cu același procent $p\%$, după care obiectul a ajuns la același preț ca la început. Aflați cu ce procent a avut loc majorarea de preț.

Soluție:

Notăm cu x prețul inițial

După ieftinire obiectul costă: $x - \frac{75}{100}x = \frac{1}{4}x$ 1p

Prima scumpire: $\frac{1}{4}x + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{4}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{x}{4}$ 2p

A doua scumpire: $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{x}{4} + \frac{p}{100} \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{x}{4} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \frac{x}{4} = x$ 2p

Deci $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 4 \Rightarrow p = 100\%$ 2p

2. La olimpiada de matematică elevii unei școli au obținut următoarele rezultate grupate în tabelul de mai jos:

| | | | | | | |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| Punctaj (x_i) | [40,50) | [50,60) | [60,70) | [70,80) | [80,90) | [90,100) |
| Frecvența (n_i) | 16 | 26 | 35 | 47 | 24 | 13 |

a) Să se completeze tabelul cu frecvențele absolute cumulate crescător;

b) Să se calculeze valoarea medie a seriei statistice;

c) Să se calculeze mediana și să se compare cu valoarea medie.

Soluție:

a)

| | | | | | | |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| Punctaj (x_i) | [40,50) | [50,60) | [60,70) | [70,80) | [80,90) | [90,100) |
| Frecvența (n_i) | 16 | 26 | 35 | 47 | 24 | 13 |
| Frecvența absolută cumulată crescător (N_i) | 16 | 42 | 77 | 124 | 148 | 161 |

..... 2p

b)

| | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 45 | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 |
| n_i | 16 | 26 | 35 | 47 | 24 | 13 |

$$\bar{x} = \frac{45 \cdot 16 + 55 \cdot 26 + 65 \cdot 35 + 75 \cdot 47 + 85 \cdot 24 + 95 \cdot 13}{16 + 26 + 35 + 47 + 24 + 13} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{720 + 1430 + 2275 + 3525 + 2040 + 1235}{161} = \frac{11225}{161} \approx 69,7 \dots\dots\dots 1p$$

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

c) clasa mediană = prima clasă din seria frecvențelor cumulate crescător căreia îi corespunde cel puțin jumătate din numărul indivizilor, deci în cazul nostru clasa mediană este [70,80)

Mediana este dată de formula: $M_e = L + \frac{C_M - N_{i-1}}{n_i} \cdot k$, unde

L = limita inferioară a clasei mediane;

C_M = cota medianei, adică $C_M = \begin{cases} \frac{N}{2}, & \text{dacă } N = \text{par} \\ \frac{N+1}{2} & \text{dacă } N = \text{impar} \end{cases}$, unde N este populația statistică

N_{i-1} = frecvența absolută cumulată crescător până la clasa mediană;

n_i = frecvența absolută corespunzătoare clasei mediane;

$k = (x_{i+1} - x_i)$ amplitudinea clasei mediane.

Deci $L = 70, C_M = \frac{161+1}{2} = 81, N_{i-1} = 77, n_i = 47, k = 80 - 70 = 10$ 1p

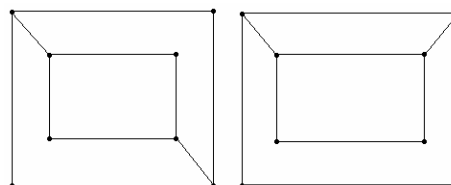
$M_e = 70 + \frac{81-77}{47} \cdot 10 = 70 + \frac{4}{47} \cong 70 + 0,085 = 70,085$ 1p

$M_e > \bar{x}$ 1p

3.

a) Să se studieze dacă grafurile din imagine sunt izomorfe.

b) Fie G un graf cu n vârfuri ($n \geq 3$) și m muchii astfel încât $m > C_{n-1}^2$. Să se arate că G nu are vârfuri izolate.



Soluție:

a) Doua grafuri sunt izomorfe dacă au același număr de noduri, același număr de muchii și dacă exista o numerotare a nodurilor din fiecare dintre cele doua grafuri astfel încât:

1. Dacă doua noduri din primul graf sunt unite printr-o muchie atunci nodurile corespunzătoare din al doilea graf sunt unite printr-o muchie;

2. Nodurile corespunzătoare au ordine egale (ordinul unui nod reprezintă numărul de muchii cu care este conectat la graf) 1p

Se constată că au câte 8 noduri, câte 10 muchii și fiecare graf are 4 noduri de ordin 3 și 4 noduri de ordin 2 1p

Dacă constatarea se face fără a da definiția de mai sus se acorda și punctul corespunzător baremului

Grafurile nu sunt izomorfe deoarece nodul din stânga sus din primul graf este legat doar cu un singur nod de ordin 3, în timp ce în al doilea graf este legat cu două noduri de ordin 3 2p

b) Presupunem prin reducere la absurd că graful are un vârf izolat 1p

Atunci numărul maxim de muchii pentru cele $n-1$ vârfuri rămase este C_{n-1}^2 1p

Contradicție cu ipoteza $m > C_{n-1}^2$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

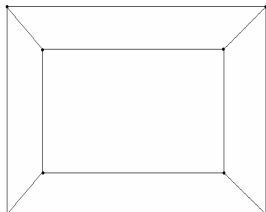
4.

- a) Desenați un graf regulat de ordin 3 cu 8 noduri;
b) Demonstrați că numărul de noduri ale unui graf regulat de ordin 3 este par.

Soluție:

- a) Un graf se numește regulat de ordin k dacă fiecare nod are ordinul k .

De exemplu



..... 3p

- b) Într-un graf regulat avem:

- suma ordenelor nodurilor este egală cu dublul numărului de muchii 1p
(Dacă elevul nu da aceasta definiție dar o folosește corect în rezolvare, se acorda și acest punct).

Presupunem că numărul de noduri este impar și atunci suma ordenelor nodurilor este impară.

Contradicție deoarece suma este egală cu dublul numărului de muchii 3p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1. În $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^3 = O_3$ și $\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = 1$.

b) Calculați $2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2011A^{2010}$

c) Calculați $(I_3 + A)^n, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Soluție

a) $A_3 = O_3$ 1p

$\det(I_3 + A) \cdot \det(I_3 - A + A^2) = \det[(I_3 + A)(I_3 - A + A^2)] = \det(I_3^3 + A^3) =$
 $= \det(I_3 + O_3) = \det I_3 = 1$ 2p

b) Din $A^3 = O_3 \Rightarrow A^n = O_3 (\forall) n \geq 3$ 1p

$2A + 3A^2 + \dots + 2011A^{2010} = 2A + 3A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

c) $(I_3 + A)^n = C_n^0 I_3^n + C_n^1 I_3^{n-1} A + C_n^2 I_3^{n-2} A^2 + C_n^3 I_3^{n-3} A^3 + \dots$ 1p

$(I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

2. Pe mulțimea \mathbf{R} se definește legea $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

a) Demonstrați că (\mathbf{R}, \circ) este grup comutativ.

b) Determinați $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $\begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases}$.

Soluție

a)
 Parte stabilă 1p
 Asociativitate 1p
 Comutativitate 1p
 Element neutru $e = 0 \in \mathbf{R}$ 1p
 Element simetric $x' = -x \in \mathbf{R}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Filiera teoretică, profil umanist

$$b) \begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 2^3} = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ 2x^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

3. Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală a fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani suma vârstelor celor doi copii va fi egală cu vârsta tatălui .

Soluție

Notam f, F și T vârstele fiului mai mic, mai mare și a tatălui

$$\begin{cases} T + 7 = 6f \\ (F + 15) \cdot 2 = T + 15 \\ (F + 18) + (F + 18) = T + 18 \end{cases} \dots\dots\dots 4p$$

f = 7 ani; F = 10 ani; T = 35 ani3p

4. Pentru golirea unui bazin cu apă se utilizează trei robinete. Timpul de funcționare a fiecărui robinet și cantitatea de apă evacuată exprimată în hectolitri sunt în tabelul de mai jos. Să se determine debitul în hl / oră a fiecărui robinet.

| Robinetul 1 (nr. ore) | Robinetul 2 (nr. ore) | Robinetul 3 (nr. ore) | Cantitatea de apă evacuată (hl) |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| 2 ore | 3 ore | 6 ore | 220 hl |
| 3 ore | 2 ore | 6 ore | 210 hl |
| 2 ore | 2 ore | 3 ore | 145 hl |

Soluție:

Notam cu d_1, d_2, d_3 debitele în hl / oră a celor trei robinete.

$$\begin{cases} 2d_1 + 3d_2 + 6d_3 = 220 \\ 3d_1 + 2d_2 + 6d_3 = 210 \\ 2d_1 + 2d_2 + 3d_3 = 145 \end{cases} \dots\dots\dots 3p$$

$d_1 = 20$ hl/oră; $d_2 = 30$ hl/oră; $d_3 = 15$ hl/oră4p